a) Жылдамдық өрісі мен қысым айырмасын үзіліссіздік және Навье-Стокс теңдеулеріне қойып, бұл теңдеулерді қанағаттандыратынын анықтаймыз.

b) Кернеулер тензоры:

Коши-Пуассон заңы

$$\tau_{ij} = (-p + \lambda^* e_{kk})\delta_{ij} + 2\eta e_{ij}$$

ньютондық сұйық үшін негізгі теңдеу болып табылады. $D\rho/Dt = 0$ болғандықтан $e_{kk} = div\vec{u} = 0$ шарты орындалады, сондықтан, $e_{ij} = 1/2\left(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i\right)$ болады және кернеу тензоры

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

түріне келеді.

Кернеулер тензорының құраушылары

$$\tau_{11} = -p + \eta\left(2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = -p, \tau_{22} = -p + \eta\left(2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) = -p,$$
$$\tau_{12} = \eta\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = -Kx_2, \tau_{23} = \eta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) = 0,$$
$$\tau_{13} = \eta\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) = 0, \tau_{33} = -p + \eta\left(2\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) = -p,$$

немесе матрицалық түрде

$$\left(\tau_{ij}\right) = \begin{pmatrix} -p & -Kx_2 & 0 \\ -Kx_2 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

c) диссипация функциясы:

Бірлік көлемге және уақытқа келетін диссипацияланған энергия жалпы алғанда $\Phi = P_{ij}e_{ij}$, ал Коши-Пуассон заңының дербес жағдайында:

$$\Phi = \left(\lambda^* e_{kk}\delta_{ij} + 2\eta e_{ij}\right)e_{ij} = 2\eta e_{ij}e_{ij}\ ,$$

болады, мұндағы,

$$e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = 0,$$

Диссипация функциясы

$$\Phi = 2\eta(e_{i1}e_{i1} + e_{i2}e_{i2} + e_{i3}e_{i3})$$

$$= \eta\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 = \frac{K^2x_2^2}{\eta}$$

түріне келеді.

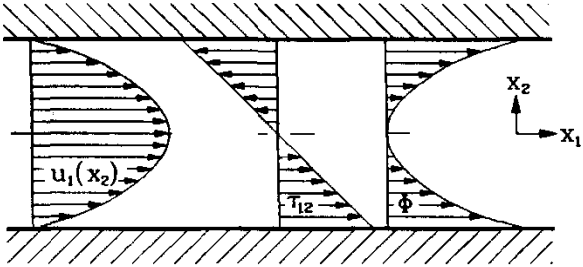
d) Диссипация энергиясын сұйық алып тұрған көлем бойынша интеграл ретінде аламыз:

$$P_D = \iiint\limits_{(V)} \Phi\, dV$$

және бірлік ұзындыққа және тереңдікке тиісті P_D–ны

$$P_D = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi\, dx_2 = \frac{K^2x_2^3}{3\eta}\Bigg|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{K^2h^3}{12\eta}$$

түрінде анықтаймыз.



Сурет 141

Жылдамдықтың, кернеулер тензорының және диссипация функциясының құраушылары суретте көрсетілген.

е) Бас кернеулер және олардың бағыттары:

Меншікті мәндер туралы есеп

$$\left(\tau_{ij} - \sigma\delta_{ij}\right) l_j = 0\,. \qquad (1)$$

түрінде болады

Кернеу тензорын қарастыра отырып, $\sigma = -p$ болатын $\vec{l} = (0,0,1)$ меншікті вектор, сәйкес меншікті мән екендігін түсінеміз (жазық ағын). Сондықтан, басқа екі меншікті мәндер мен меншікті векторларды тек x_1, x_2 жазықтығында іздейміз. Сипаттаушы теңдеу енді

$$\det\begin{pmatrix} -(p+\sigma) & -Kx_2 \\ -Kx_2 & -(p+\sigma) \end{pmatrix} = (p+\sigma)^2 - K^2 x_2^2 = 0$$

түрінде жазылады.

Бұл келесі меншікті мәндерге алып келеді:

$$(p+\sigma) = \pm Kx_2$$

$$\Rightarrow \quad \sigma^{(1)} = -p + Kx_2, \;\; \sigma^{(2)} = -p - Kx_2\,.$$

(1) гомогенді жүйенің бірінші теңдеуін пайдалана отырып, меншікті векторларды есептейміз:

$$-\left(p+\sigma^{(k)}\right) l_1^{(k)} - Kx_2 l_2^{(k)} = 0$$
$$\Rightarrow \quad l_1^{(k)} = \frac{-Kx_2}{p+\sigma^{(k)}} l_2^{(k)}$$

Нормаландыру шарты $l_1^{(k)2} + l_2^{(k)2} = 1$ болып табылады. Оны біз кейінірек шкалалау арқылы қанағаттандырамыз. Сондықтан, алдымен $l_2^{(k)} = 1$ деп аламыз.
$\sigma = \sigma^{(1)} = -p + Kx_2$ үшін алатынымыз:

$$l_1^{(1)} = -1, \quad \left|\vec{l}^{(1)}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2},$$

және осының салдарынан нормаланған вектор

$$\vec{l}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

түрінде анықталады.
$\sigma = \sigma^{(2)} = -p - Kx_2$ үшін:

$$l_1^{(2)} = +1, \quad \left|\vec{l}^{(2)}\right| = \sqrt{(1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

теңдіктері орындалады, және сол себепті:

$$\vec{l}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нәтижелерді тексеру үшін $\vec{l}^{(1)} \times \vec{l}^{(2)}$ векторлық көбейтіндісінен бізге белгілі $\vec{l}^{(3)}$ меншікті векторын есептейміз:

$$\vec{l}^{(1)} \times \vec{l}^{(2)} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}[\vec{e}_1 \cdot 0 + \vec{e}_2 \cdot 0 + \vec{e}_3 \cdot (-2)] = -\vec{e}_3$$

және бұл теріс меншікті вектор $\vec{l}^{(3)}$-ке сәйкес келеді. $\vec{l}^{(3)} = (0, 0, 1)$-ті алу үшін екі меншікті векторлардың бірінің таңбасын өзгерту керек. $\vec{l}^{(1)}$ векторын -1-ге көбейтіп, мыналарды табамыз:

$$\sigma^{(1)} = -p + Kx_2\,, \qquad \vec{l}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^{(2)} = -p - Kx_2\,, \qquad \vec{l}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^{(3)} = -p\,, \qquad \vec{l}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

мұндағы, $\vec{l}^{(1)}$, $\vec{l}^{(2)}$ және $\vec{l}^{(3)}$ оң координат жүйесін өрнектейді. Кернеулер тензоры x_2–ден тәуелді болса да, жалпы өріс бойынша бас кернеудің бағыттары өріс бойынша өзгермейді. Бұлай болу себебі, біз локальді қарапайым жылжи қозғалатын ағынды қарастырамыз.

4.1-2-есеп. Пуазейль ағынында жылудың таралуы

4.1-1-есепте берілген ағынды қарастырамыз. Меншікті жылу өткізгіштігі λ тұрақты сұйықты идеалды деп

жорамалдайық. Және де жоғарғы қабырға тұрақты T_0 температурада ұсталады, ал төменгі қабырға толық жылу оқшауланған деп аламыз. Сонда:

a) пластиналар арасында $T(x_2)$ температураның таралуын есептеңіз;

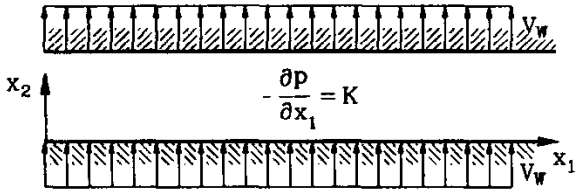
b) төменгі қабырғаның температурасын анықтаңыз;

c) жоғарғы қабырғаның бірлік ауданы арқылы жылу ағынын анықтаңыз;

d) пластиналар арасындағы сұйықтың энтропиясының Ds/Dt өсуін есептеңіз.

4.1-3-есеп. Қабырғалары кеуек каналдағы ағын

Ньютондық сұйық суретте көрсетілген x_1 және x_3 бағыттарында шексіз ұзын канал бойымен ағады. Пластиналар арасындағы қашықтық h-қа тең. Ағын жазық, орнықталған, сұйықтың тығыздығы ρ мен тұтқырлығы η тұрақты деп алынған және көлемдік күштерді ескермеуге болады. Жоғарғы және төменгі қабырғалардың кеуектігі жылдамдықтың қабырғалардағы V_w нормаль құраушылары тұрақты болатындай таралған. Қысымдар айырмасы x_1 бағытында тұрақты ($\partial p/\partial x_1 = -K$). Канал шексіз ұзын болғандықтан, жылдамдықтың таралуы x_1 бағытынан тәуелсіз болады.



Сурет 142

a) Үзіліссіздік теңдеуін қолдана отырып x_2 бағытындағы $u_2(x_2)$ жылдамдық құраушысының таралуын есептеңіз;

b) осы есеп үшін Навье-Стокс теңдеуінің x_1 бағытындағы құраушысын ықшамдаңыз;

c) u_1 жылдамдық құраушысы үшін шекаралық шартты өрнектеңіз;

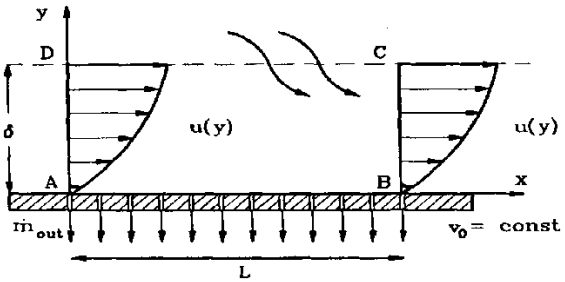
d) $u_1(x_2)$ жылдамдық құраушысының таралуын анықтаңыз.

Нұсқау: біртекті дифференциалдық теңдеуді шешкеннен кейін біртексіз дифференциалдық теңдеудің дербес шешімі $u_{1_p} = const * x_2$ қою арқылы табылады.

Берілгендері: $\rho,\ \eta,\ K,\ h,\ V_w$.

4.1-4-есеп. Шекаралық қабаттағы сорылу процесі

Сығылмайтын ньютондық сұйық x және z бағыттарында шексіз ұзын жазық пластина бойымен орнықталған қозғалыспен ағады. Шекаралық қабаттың қалыңдығы ағын бағыты x бойынша өсетіні белгілі. Бірақ бұл есепте сору қарқындылығы L ұзындық бойынша шекаралық қабаттың қалыңдығы тұрақты болып қалатындай таралған. Қысым p тұрақты деп қарастырылады. Пластинадан алыста $u(y)$ жылдамдық құраушысының мәні U_∞.



Сурет 143

a) Жылдамдық өрісі үшін шекаралық шарттарды беріңіз;

b) Үзіліссіздік теңдеуін қолданып, $v(y)$ жылдамдық құраушысын алыңыз;

c) Навье-Стокс теңдеуінің x құраушысын ықшамдаңыз және $u(y)$ жылдамдық құраушысын есептеңіз;

d) D-C беті арқылы кіретін сұйықтың массалық шығыны сорудың әсерінен A-B беті арқылы $\dot{m}_{\text{шығ}}$ массалық шығынға тең екенін көрсетіңіз;

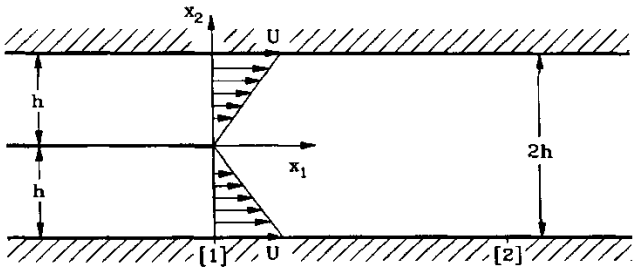
e) Қабырғада жанама кернеуді интегралдап, бірлік тереңдікке және пластинаның L ұзындығына тиісті кедергіні есептеңіз;

f) Импульстың сақталу теңдеуінің x бағытындағы құраушысын ABCD бақылау көлеміне қолданып кедергі күшін есептеңіз.

Берілгендері: $U_\infty,\ \eta,\ \rho,\ v_0$.

4.1-5-есеп. Сұйықтар ағынының араласуы

Ньютондық сұйық $(\rho, \eta = const)$ биіктігі $2h$ канал бойымен орнықталған қозғалыспен ағады. Каналдың ортасын бөліп тұратын шексіз жұқа пластина орнатылған. Каналдың қабырғалары тұрақты U жылдамдықпен x_1 координатасы бойынша оң бағытта қозғалады.



Сурет 144

Сұйықтың қалақшамен бөлінген екі ағыны пластинаның соңына жеткенде араласады. [2] қимасында x_1-ден тәуелсіз болатын жылдамдықтың жаңа профилі $u_1 = u_1(x_2)$ пайда болады. Көлемдік күштерді ескермеуге болады.

a) Қозғалыс теңдеуін пайдалана отырып, $\partial p/\partial x_1$ қысым градиенті ағын бойынша [2] қимасынан төмен қарай өзгермейтінін көрсетіңіз;

b) [1] қимада бірлік тереңдікке тиісті $\dot{V}$ көлемдік шығынды есептеңіз;

c) $x_2 = \pm h$ қабырғаларға жабысу шартын және [2] қимадағы көлемдік шығын [1] қимадағыға теңдігі шартын пайдаланып, [2] қимасында $u_1 = u_1(x_2)$ жылдамдық профилін анықтаңыз. Куэтт ағыны қысымдар айырымының нәтижесі болғандықтан, қысым градиенті нөлден өзге болу керектігін көрсетіңіз;

d) Қысым градиентін есептеңіз.

Берілгендері: h, U, ρ, η.

4.1-6-есеп. Сынаға соғылатын екі өлшемді су ағыншасы

Екі өлшемді су ағыншасы 2α сүйір бұрышты ағын бағытына симметриялы орналасқан сынаға соғылады. Ағыстың жоғарғы жағында ағыншаның жылдамдығы U_0 және қалыңдығы h_0. қабырғамен үйкелістің әсерінен сынаның артқы бөлігінде жылдамдық келесі заңдылықпен таралатын шекаралық қабаттар пайда болады:

$$u(y') = U_0 \sin\left(\frac{\pi y'}{2\delta_L}\right).$$

a) Есептеңіз:

1) тұтқырсыз сұйық үшін h қалыңдықты,

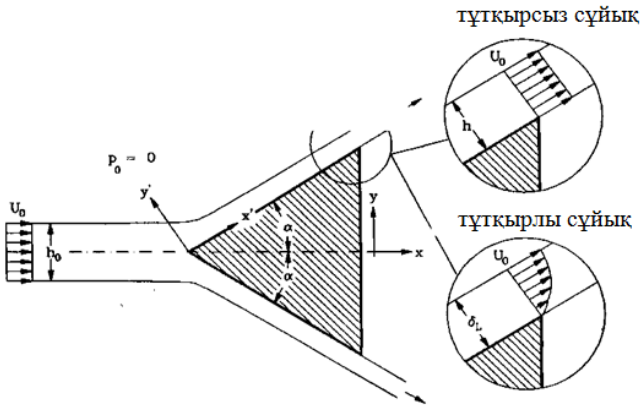
2) тұтқырлы сұйық үшін δ_L қалыңдықты.

b) Келесі жағдайлар үшін сынаға әсер ететін бірлік тереңдікке тиісті күшті анықтаңыз:

1) тұтқырсыз сұйық,

2) тұтқырлы сұйық.

c) $\alpha = \pi/2$ үшін есептелген күштердің айырымын есептеңіз.



Сурет 145

Берілгендері: U_0, h_0, α, ρ.

4.1-7-есеп. Құбыр қабырғасында кристалдың өсуі

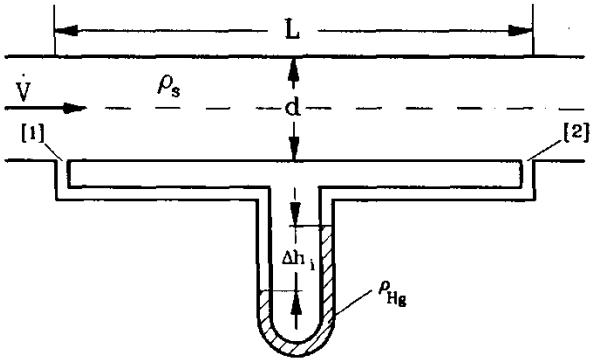
Құрамында тұзы бар су (тығыздығы ρ_S) ұзын құбыр бойымен аққанда құбыр қабырғасында тұздың кристалдары пайда болады. Кристалдың өсуін тексеріп отыру үшін [1] және [2] қималар арасына манометр орнатылады. Манометр сұйығы - сынаптың тығыздығы ρ_{Hg}. Баған биіктіктері Δh_1, Δh_2 және Δh_3 бірдей уақыт аралықтарында өлшенеді.

a) $\Delta p_i(\Delta h_i)$ қысым айырымын табыңыз.

b) $\Delta\zeta_i(\Delta h_i)$ жоғалу коэффициентін анықтаңыз.

c) Рейнольдс сандарын (үшеу) есептеңіз.

d) Қысым айырымдарына сәйкес келетін орташа кристал қалыңдықтарын анықтаңыз.

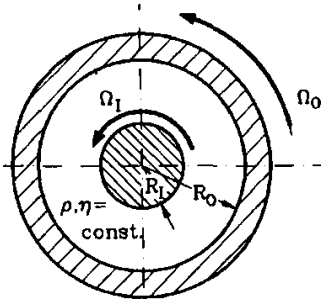


Сурет 146

Берілгендері: $L = 10$ м, $d = 1$м, $\dot{V} = 4.3\,\text{м}^3/\text{с}$, $\rho_S = 1184\,\text{кг/м}^3$, $\eta_S = 0.01296$ кг/(м · с), $\rho_{Hg} = 13550$ кг/м^3, $\Delta h_1 = 41.68$ мм, $\Delta h_2 = 64.00$ мм, $\Delta h_3 = 95.08$ мм, $g = 9.81$ м/с^2.

4.2. Бағытталған ламинарлы ағын

4.2-1-есеп. Сақина тәрізді қуыстағы ағын



Сурет 147

Тығыздығы ρ және тұтқырлығы η сығылмайтын ньютондық сұйық радиустары R_O және R_I екі шексіз ұзын цилиндрлер арасындағы сақиналы қуыстың ішінде орнықталған ағынмен ағады. Сыртқы цилиндр Ω_O, ал ішкісі Ω_I бұрыштық жылдамдықпен айналады.

Жылдамдықтың осьтік компоненті нөлге тең жағдай үшін есептеңіз:

a) жылдамдық және қысым өрісін;

b) цилиндрлерге әсер ететін моменттерді;

c) қуыстың ішіндегі диссипацияланған күшті.

d) Қандай Ω_O/Ω_I қатынас үшін ағын потенциалды болады?

Берілгендері: $R_O, R_I, \Omega_O, \Omega_I, \rho, \eta$.

Шешуі

а) Цилиндрлік координаталардағы жылдамдық және қысым өрісі:

Жылдамдықтың тек бір ғана нөл емес құраушысы белгілі:

$$u_\varphi(r) = \frac{\Omega_\mathrm{O} R_O^2 - \Omega_\mathrm{I} R_I^2}{R_O^2 - R_I^2} + \frac{(\Omega_\mathrm{I} - \Omega_\mathrm{O}) R_I^2 R_O^2}{R_O^2 - R_I^2}\frac{1}{r}$$

$$= C_1 r + C_2 \frac{1}{r},$$

мұндағы, тұрақтылар

$$C_1 = \frac{\Omega_\mathrm{O} R_O^2 - \Omega_\mathrm{I} R_I^2}{R_O^2 - R_I^2}, \qquad C_2 = \frac{(\Omega_\mathrm{I} - \Omega_\mathrm{O}) R_I^2 R_O^2}{R_O^2 - R_I^2} \qquad (1)$$

Навье-Стокс теңдеулерінің r бағытындағы құраушысынан

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\rho}{r}\left(C_1 r + \frac{C_2}{r}\right)^2$$

қысымның таралуын келесі түрде анықтауға болады:

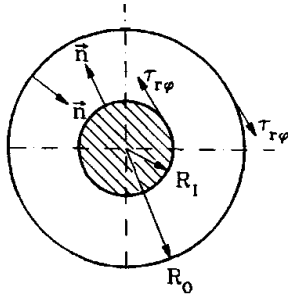
$$p(r) = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\Omega_{\mathrm{O}} R_O^2 - \Omega_{\mathrm{I}} R_I^2}{R_O^2 - R_I^2}\right)^2 r^2$$

$$+ 2\rho \frac{\Omega_{\mathrm{O}} R_O^2 - \Omega_{\mathrm{I}} R_I^2}{R_O^2 - R_I^2} \frac{(\Omega_{\mathrm{I}} - \Omega_{\mathrm{O}}) R_I^2 R_O^2}{R_O^2 - R_I^2} \ln r$$

$$- \frac{\rho}{2}\left(\frac{(\Omega_{\mathrm{I}} - \Omega_{\mathrm{O}}) R_I^2 R_O^2}{R_O^2 - R_I^2}\right)^2 \frac{1}{r^2} + const$$

(Сығылмайтын сұйықтың ағыны кезінде қысым үшін шекаралық шарттар болмаған жағдайда қысымды тек тұрақтыға дейін ғана анықтауға болады).

б) Цилиндрлердегі момент: Симметрия шарттары бойынша моменттердің екі цилиндрлерде де тек z құраушысы ғана болады:



Сурет 148

$$M_I = \tau_{r\varphi}\Big|_{r=R_I} 2\pi R_I^2 \qquad (2)$$

$$M_O = -\tau_{r\varphi}\Big|_{r=R_O} 2\pi R_O^2. \qquad (3)$$

Кернеу тензорының $\tau_{r\varphi}$ құраушысы:

$$\tau_{r\varphi} = 2\eta e_{r\varphi} = \eta\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{r\varphi} = -\eta \frac{2}{r^2} \frac{(\Omega_{\mathrm{I}} - \Omega_{\mathrm{O}}) R_I^2 R_O^2}{R_O^2 - R_I^2}$$

(2) және (3) – тен шығатыны:

$$M_I = -4\pi\eta \frac{(\Omega_{\mathrm{I}} - \Omega_{\mathrm{O}}) R_I^2 R_O^2}{R_O^2 - R_I^2}$$

$$M_O = 4\pi\eta \frac{(\Omega_{\mathrm{I}} - \Omega_{\mathrm{O}}) R_I^2 R_O^2}{R_O^2 - R_I^2}$$

Моменттер тең және қарама қарсы болады. Бұл әрі импульстің сақталуы заңының салдары болып табылады.

в) Диссипацияланған энергия:
Ағын тұрақталған болу үшін қуыстың ішіндегі диссипацияланған энергия қоршаған ортаға жылу ретінде берілуі тиіс:

$$P_D = \iiint_V \Phi \, dV = -\dot{Q} \, .$$

Энергия теңдеуін

$$\frac{D}{Dt}(K + E) = P + \dot{Q}$$

іші сұйыққа толы қуыстағы көлемге қолданамыз. Ағын тұрақталған болғандықтан және цилиндрдің қабырғалары арқылы сұйық өтпейтіндіктен, бұл теңдеудің сол жағы нөлге

тең. Бұл Рейнольдстың тасымалдау туралы теоремасын теңдеудің сол жағына қолдану арқылы оңай түсіндіріледі.

$$\frac{D}{Dt}(K+E)=\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{(V)}\rho\left(\frac{u^2}{2}+e\right)dV+\iint\limits_{(S)}\rho\left(\frac{u^2}{2}+e\right)\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS\,.$$

Энергия жылуға диссипацияланады (массалық күштердің энергиясы нөлге тең):

$$-\dot{Q}=P_D=P=\iint\limits_{(S)}t_i u_i\,dS$$

$$\Rightarrow\quad P_D=\iint\limits_{(S_I)}t_\varphi u_\varphi\,dS+\iint\limits_{(S_O)}t_\varphi u_\varphi\,dS\,.$$

S_I-ге жабысуға байланысты $u_\varphi=\Omega_{\mathrm{I}}\mathrm{R}_{\mathrm{I}}$ және S_O-ге жабысуға байланысты $u_\varphi=\Omega_{\mathrm{O}}\mathrm{R}_{\mathrm{O}}$ шарттарынан

$$P_D=\Omega_{\mathrm{I}}\iint\limits_{\mathrm{S_I}}\mathrm{t}_\varphi\mathrm{R}_{\mathrm{I}}\,\mathrm{dS}+\Omega_{\mathrm{O}}\iint\limits_{\mathrm{S_O}}\mathrm{t}_\varphi\mathrm{R}_{\mathrm{O}}\,\mathrm{dS}\,.$$

Интегралдар цилиндрлердің сұйыққа беретін моменттерін өрнектейді. Сонымен, табатынымыз:

$$P_D=-\Omega_{\mathrm{I}}\mathrm{M}_{\mathrm{I}}-\Omega_{\mathrm{O}}\mathrm{M}_{\mathrm{O}}$$

және есептелген моменттерді ескерсек, онда:

$$P_D = 4\pi\eta \frac{R_I^2 R_O^2}{R_O^2 - R_I^2}(\Omega_{\mathrm{I}} - \Omega_{\mathrm{O}})^2 \ .$$

Диссипацияланған энергия жылдамдық өрісінде қатты дененің $C_1 r$ әсерінен тәуелсіз деп қарастырылады.

г) Құйынсыз (потенциалды) ағын үшін $\Omega_{\mathrm{O}}/\Omega_{\mathrm{I}}$:
Жазық ағында ротордың тек z бағытында ғана нөл емес құраушылары болуы мүмкін:

$$curl\vec{u} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(ru_\varphi\right) - \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z$$

$$= \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(C_1 r^2 + C_2)\vec{e}_z = 2C_1\vec{e}_z$$

Құйынсыз ағын үшін мынадай талап қоямыз:

$$C_1 = 0 \ .$$

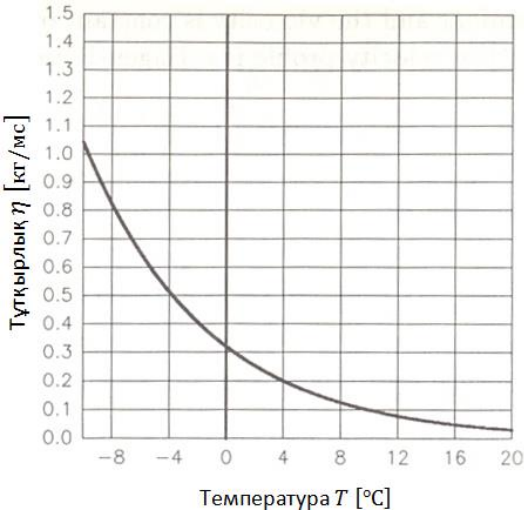
Онда (1)-ден шығатыны:

$$\Omega_O R_O^2 = \Omega_I R_I^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Omega_O}{\Omega_I} = \left(\frac{\mathrm{R}_I}{\mathrm{R}_O}\right)^2 . \qquad (4)$$

$R_O \to \infty$, яғни $\Omega_{\mathrm{O}} = 0$ болған жағдайы (4) теңдеуінің маңызды дербес жағдайы болып табылады. Есептелген ағын ұзын цилиндрдің (R_I, Ω_I) шексіз кеңістікте айналуы үшін Навье-Стокс теңдеулерінің дәл шешімі. (4) теңдеу қанағаттандырылатын жағдай үшін ағын тұтқыр потенциалды болып табылады.

4.2-2-есеп. Өңделмеген мұнайды құбыр арқылы тасымалдау

Әдетте мұнайдың тұтқырлығы судың тұтқырлығына қарағанда жүздеген, тіпті, мыңдаған есе артық болады. Өте төмен ауа температурасында мұнайды жеткілікті үлкен қысымдар айырымын тудыра отырып құбыр арқылы тасымалдауға болады. Мұнымен қатар, механикалық энергияның диссипациялануы есебінен тұтқырлықты, сонымен бірге қысымдар айырымын да айтарлықтай азайтады. Суретте мұнай тұтқырлығының температураға байланысты өзгеруі келтірілген.



Сурет 149

Мұнайды құбыр арқылы тасымалдау есебінде ағысты орнықталған, ламинарлы, сұйықты сығылмайтын және оның температурасы көлденең қима бойынша өзгермейді деп есептеуге болады. Осыдан көлденең бағытта сұйықтың көлемдік (және массалық) шығынының тұрақты болатындығын байқауға болады. Сонымен қатар, мұнай

ағынының орташа жылдамдығы $\bar{U}$, құбырдың диаметрі R және қоршаған орта температурасы $T_{\text{В}}$ белгілі. Құбырдың бірлік ұзындығы арқылы қоршаған ортаға берілетін жылу мөлшерін келесі теңдікпен жуықтап есептеуге болады:

$$\dot{Q} = 2\pi R k (T - T_{\text{В}}), \qquad (1)$$

мұндағы, T-мұнайдың орташа температурасы.

Сонда:

a) Жылдамдық профилін $u_z(r)$;

b) Ф диссипациялық функиясын табыңыз. (Ұсыныс: диссипация Ф теңдеуін символикалық түрде жазып, цилиндрлік координаталар жүйесін пайдаланыңыз).

c) Бірлік уақыт ішінде бірлік ұзындықта диссипацияланған E_D энергияны динамикалық тұтқырлықтың η функциясы ретінде табыңыз;

d) Көлемдік шығын ағыс бағытындағы координатадан тәуелсіз болуы үшін, диссипацияланған энергия қоршаған ортаға берілетін жылу мөлшеріне тең болуы қажет. Бұл шарт мұнайдың тұтқырлығы мен температурасы арасындағы қатынасты табуға мүмкіндік береді. Осы қатынасты суреттен көрсетіңіз және температура T мен тұтқырлықты η табыңыз.

e) Қысымдар айырымын $\partial p/\partial z$ есептеңіз.

Берілгендері: $\bar{U} = 3$ м/с, $R = 0.5$ м, $k = 0.8$ В/(м$^2 \cdot$К), $T_{\text{В}} = -40$°C (Аляска).

Шешуі

a) Жылдамдық профилін $u_z(r)$ табу.

Ағын ламинарлы, көлденең қима бойынша тұтқырлық тұрақты (өйткені, температура өзгермейді). Сондықтан, жылдамдық профилі Хаген-Пуазейль профилімен сипатталады:

$$u_z(r) = 2\bar{U}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right). \qquad (2)$$

b) Диссипативті функцияны Ф табу. Ф функциясының түрі

$$\Phi = \lambda^*(spE)^2 + 2\eta sp(E^2). \qquad (3)$$

формуласымен беріледі.
Сығылмайтын сұйықтың ағыны үшін $spE = e_{ii} = 0$. Деформация тензоры коэффициентінің цилиндрлік координаталарда мынадай компоненттері бар:

$$E = \begin{pmatrix} e_{rr} & e_{r\varphi} & e_{rz} \\ e_{\varphi r} & e_{\varphi\varphi} & e_{\varphi z} \\ e_{zr} & e_{z\varphi} & e_{zz} \end{pmatrix}$$

мұндағы, $e_{rz} = \left(\frac{1}{2}\right)\partial u_z/\partial r$, бұдан басқа барлық компоненттері нөлге тең, осыдан жоғарыдағы матрица келесі түрде ие болады:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

мұндағы,

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = -4\bar{U}\frac{r}{R^2}. \qquad (4)$$

Осыларды пайдаланып, E^2 мәнін анықтаймыз:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

осыдан шығатыны:

$$sp(E^2) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2.$$

(3) және (4) теңдеулерінен диссипация функциясының мәнін анықтаймыз:

$$\Phi = 2\eta\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2 = \eta\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2 = 16\eta\overline{U}^2\frac{r^2}{R^4}. \qquad (5)$$

c) Бірлік уақыт ішінде бірлік ұзындықта диссипациялану E_D энергиясы:

$$E_D = \iiint\limits_{(V)} \Phi dV = \int\limits_0^R 16\eta\overline{U}^2\frac{r^2}{R^4}2\pi r dr = 8\pi\eta\overline{U}^2. \qquad (6)$$

d) Температура T мен тұтқырлықты η анықтау. Бұл үшін диссипацияланған энергияның қоршаған ортаға берілген жылуға тең екендігін пайдаланамыз:

$$E_D = \dot{Q} \qquad (6)$$

$$\Rightarrow 8\pi\eta\overline{U}^2 = 2\pi Rk(T - T_{\text{В}})$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{kR}{4\overline{U}^2}(T - T_{\text{В}}). \qquad (7)$$